VI Croissances comparées

propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Démonstration

Soit f la fonction défini sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$

f est dérivable sur $[1, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in [1, +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$

On résout $2 - \sqrt{x} > 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{x} > -2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 2$

$\Leftrightarrow x < 4$ car la fct° carrée est st^t ↗ sur $[0, +\infty[$

x	1		4		$+\infty$
$2-\sqrt{x}$		$+$	0	$-$	
$2x$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	$\ln 4 - \sqrt{4}$	↘	
$f(x)$			$-$		

$\ln 4 - \sqrt{4} = \ln 4 - 2 < 0$

le maximum de $f(x)$ sur $[1; +\infty[$ est négatif

donc $\forall x \in [1 ; +\infty[\quad f(x) < 0$

$\Leftrightarrow \ln x - \sqrt{x} \leq 0$

$\Leftrightarrow \ln x \leq \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x}$ $\qquad \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}}$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ Donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Copyright : ©Programmaths 2020

propriété $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$ (cas indéterminé "$0 \times (-\infty)$")

Démonstration :

On remarque que on a $x \ln x = \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \dfrac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$

par composition $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0.$

Propriété : On étend ces limites aux puissances de x.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^n \ln x = 0$

Dem : • $\dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$

• $x^n \ln x = x^{n-1} \times x \ln x$