COMPLÉMENT DE PROBABILITÉS POUR LA SVT

LOIS CONTINUES - TEST DU KHI 2

I Notion et exemples de lois continues

Vocabulaire : Soit X une variable aléatoire.

- X est une variable aléatoire discrète si elle prend un nombre fini de valeurs.
  La loi de probabilité de cette variable est alors une loi de probabilité discrète.
  exemples : loi de Bernoulli, loi binomiale ...
- X est une variable aléatoire continue quand elle prend ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$
  La loi de de probabilité de cette variable aléatoire est alors une loi continue sur l'intervalle I

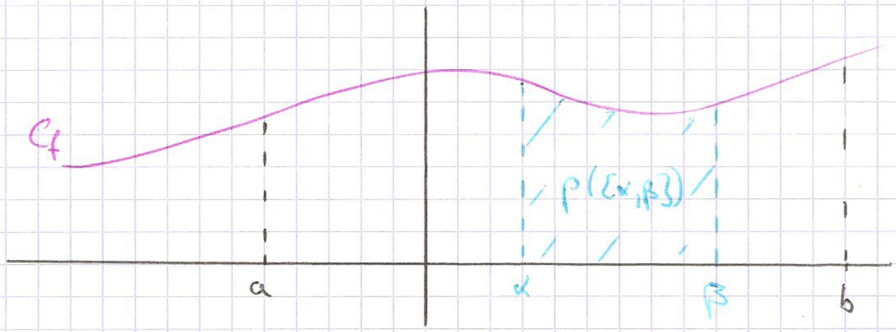
Dans le cas d'une variable aléatoire continue, on ne calcule pas la probabilité que X prenne une valeur spécifique mais on calculera la probabilité que X prenne ses valeurs dans un intervalle donné inclus dans I

A toute loi de probabilité continue sur I correspond une fonction continue positive sur I qui permet de calculer la probabilité d'un intervalle en faisant un calcul d'aire sous la courbe (donc un calcul d'intégrale)

Cette fonction s'appelle la fonction de densité de la loi de probabilité.

On dit aussi que les lois continues sont des lois à densité

Illustration : Pour une loi continue sur un intervalle $[a,b]$ de densité f.



on a $p([\alpha,\beta]) = p(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$

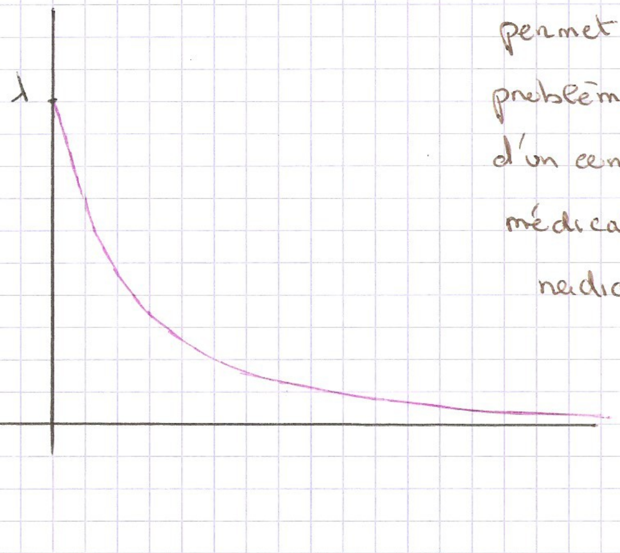
Remarques :

- (définition) Une fonction f est une fonction de densité sur I $\boxed{\text{ssi}}$ l'aire sous la courbe sur I est égale à 1
  $\Leftrightarrow \int_I f(t)\,dt = 1$
- Pour tout réel c de I
  $p(X=c) = 0$

2 Exemples de lois continues

⊛ La loi exponentielle

C'est une loi continue sur $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$ dont la fonction de densité est $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

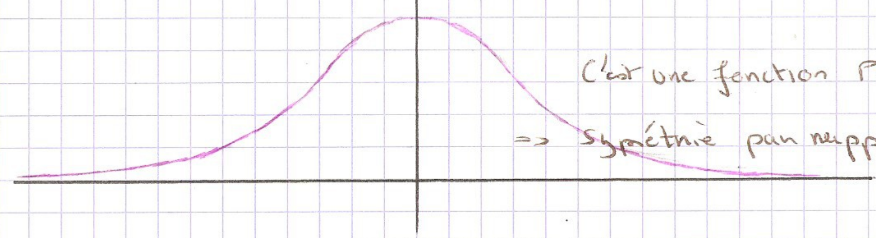


permet de traiter entre autre les problème de radioactivité : demi-vie d'un corps radioactif, traitement médical des cancers par un corps radioactif, ...

(*) La loi normale centrée réduite (aussi appelée loi gaussienne)

C'est une loi continue sur $\mathbb{R}$ dont la fonction de densité est $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

Courbe de GAUSS ou "courbe en cloche"



C'est une fonction PAIRE.

=> Symétrie par rapport aux ordonnées

Elle permet de traiter des phénomènes naturels fréquents résultant de l'addition de plusieurs causes indépendantes comme par exemple la taille d'un individu, le taux de Cholestérol ...

II Loi de KHI 2 et test du KHI 2

1°) Loi du khi 2 (ou χ^2)

Définition :

Soient $X_1, X_2, \dots, X_k$ k variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite

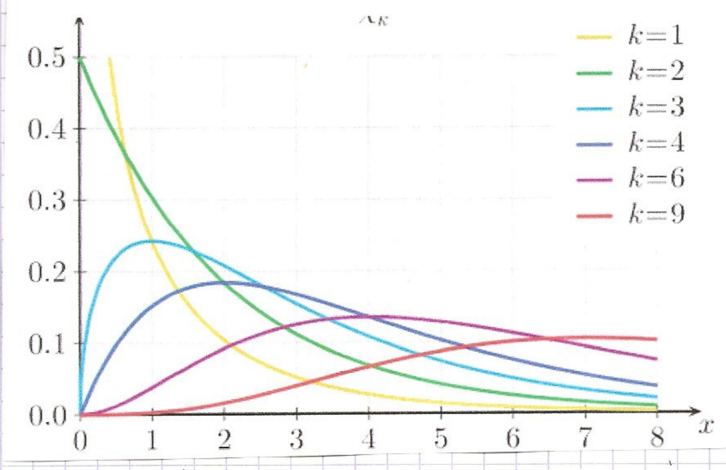
la variable $X = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2$

suit une loi du Khi 2 à k degrés de liberté

Cette loi se note χ^2_k ou $\chi^2(k)$

A chaque degré de liberté correspond une fonction de densité

Fonctions de densité de la loi du χ^2 selon le nombre k de degrés de liberté



Remarque : Plus k est grand, plus la courbe se rapproche de celle d'une loi normale (courbe en cloche)

- le calcul du nombre de degrés de liberté se fait de la façon suivante :

nombre de degrés de liberté = nombre de variables - nombre de liaisons

exemple dans un tableau dont on connait à priori les calculs marginaux

	y_1	y_2	y_3	y_4	Total
x_1	7	22	21	10	60
x_2	11	6	13	10	40
x_3	12	22	36	30	100
TOTAL	30	50	70	50	400

- 3 lignes et 4 colonnes dans le tableau de départ

On n'a que 6 degrés de libertés car les autres valeurs sont "liées" : elles peuvent être calculées à partir des 6 premiers et des calculs marginaux.

On pourra utiliser une formule simplifiée pour ce style de tableaux

nombre de ddl = (nbre de ligne - 1) x (nbre de colonnes - 1)