Démonstration

1°) $\overline{z+z'} = \overline{a+bi + a'+b'i}$

$= \overline{(a+a')+(b+b')i}$

$= a+a' - (b+b')i$ ①

① = ②

D'où la propriété

D'autre part $\overline{z}+\overline{z'} = a-bi + a'-b'i$

$= a+a'+(-b-b')i$

$= a+a' - (b+b')i$ ②

2°) trivial

3°) $zz' = (a+bi)(a'+b'i)$

$= aa' + ab'i + ba'i + bb'i^2$

$= aa' - bb' + (ab'+ba')i$

donc $\overline{zz'} = aa' - bb' - (ab'+ba')i$ ①

D'autre part

$\overline{z}\,\overline{z'} = (a-bi)(a'-b'i)$

① = ②

$= aa' - ab'i - a'bi + bb'i^2$

d'où la

$= aa' - bb' + (-ab'-a'b)i$

propriété

$= aa' - bb' - (ab'+a'b)i$ ②

4°) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{1(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$

donc $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{b}{a^2+b^2}i$ ①

D'autre part $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{a-bi} = \dfrac{1(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)} = \dfrac{a+bi}{a^2+(-b)^2}$

$= \dfrac{a+bi}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{b}{a^2+b^2}i$ ②

① = ② d'où la propriété

5°) $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \dfrac{1}{z'}} \underset{\text{prop 3}}{=} \overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} \underset{\text{prop 4}}{=} \overline{z} \times \dfrac{1}{\overline{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

69) Par récurrence

Initialisation : au 1er rang $n=0$

$\overline{z^0} = \overline{1} = 1$ D'autre part $\overline{z}^0 = 1$

on a bien $\overline{z^0} = \overline{z}^0$ La prop est vraie au 1er rang

Hérédité

→ Hypothèse de récurrence (HR) : On suppose la propriété vraie à un rang n donné : $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

→ au rang suivant : (On veut montrer que $\overline{z^{n+1}} = \overline{z}^{n+1}$)

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z}$$

prop 3 → $= \overline{z^n} \times \overline{z}$

HR → $= \overline{z}^n \times \overline{z}$

$= \overline{z}^{n+1}$

La propriété est héréditaire

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\overline{z^n} = \overline{z}^n$