VIII La formule du binôme de NEWTON

1°) Utilisation du symbole Σ

Exple : soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Si on l'écrit en extension (avec des pointillés) on obtient

$$u_n = \frac{1}{2\times 0+1} + \frac{1}{2\times 1+1} + \frac{1}{2\times 2+1} + \dots + \frac{1}{2n+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}$$

Exple de calcul :

$$u_0 = \frac{1}{2\times 0+1} = 1 \qquad u_1 = 1 + \frac{1}{2\times 1+1} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$u_2 = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2\times 0+1} + \frac{1}{2\times 1+1} + \frac{1}{2\times 2+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15}$$

Remarques :

- La définition d'une suite avec le symbole somme est une définition explicite : on donne le terme général de la suite (u_n en fonction de n)
- On peut aussi considérer cette écriture comme une formule de récurrence.

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k+1}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\times 0+1} + \frac{1}{2\times 1+1} + \dots + \frac{1}{2n+1}} + \frac{1}{2(n+1)+1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2n+3}}$$

Formule de récurrence