2°) nombres binomiaux et triangle de PASCAL

Définition : FACTORIELLE

Pour tout entier naturel n on définit la factorielle de n que l'on note $n!$ par

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

Par convention on a $0! = 1$

expl : $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

* Nombres binomiaux

Contexte : tirage simultané de k boules dans une urne qui en contient n.

Déf : le nombre de façon de choisir k boules dans une urne qui en contient n est noté $\binom{n}{k}$ qui se lit " k parmi n " et on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{k(k-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}$$

Rq : • Dans le supérieur on rencontrera la notation

$$\binom{n}{k} = C_n^k \quad (C \text{ comme combinaison})$$

• les nombres $\binom{n}{k}$ sont aussi appelés les nombres binômiaux.

expl : nbre de combinaisons possible avec l'ancien Loto 6 numéro parmi 49

$$\text{nombre de grille} = \binom{49}{6} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}$$

$$= 13983816$$

Rq : on a obligatoirement $k \leq n$

Outil pratique pour calculer les nombres binomiaux :

LE TRIANGLE DE PASCAL

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$\vdots$

Quelques propriétés

- $\binom{n}{0} = 1$ • $\binom{n}{n} = 1$ • $\binom{n}{1} = n$

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

expl : $\binom{3}{2} = \binom{2}{2} + \binom{2}{1}$

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ politique de "choix" ou de "non choix"