3°) Formule du binôme de NEWTON et démonstration

Propriété : Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel n on a

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Démonstration : Par récurrence

Initialisation : au 1er rang n = 0

$(a+b)^0 = 1$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
$$= \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

La propriété est vraie au 1er rang

Hérédité :

→ Hypothèse de récurrence (HR)

On suppose la propriété vraie à un rang n donné :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

→ au rang suivant

On veut montrer que

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

intégration dans Σ $$= \sum_{k=0}^{n} (a+b)\left[\binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right]$$

distributivité $$= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right)$$

séparation en 2 sommes $$= \underline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}} + \underline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}}$$

écriture en extension $$\binom{n}{0}a^1b^n + \binom{n}{1}a^2b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}a^n b^1 + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0$$

$$+ \binom{n}{0}a^0b^{n+1} + \binom{n}{1}a^1b^n + \binom{n}{2}a^2b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}a^n b^1$$

Factorisation partielle

$$= \binom{n}{0}a^0b^{n+1} + \underline{\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right)}a^1b^n + \left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right)a^2b^{n-1} + \dots + \left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)a^nb^1 + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0$$

utilisation de la propriété des nbs binomiaux

$$= \binom{n}{0}a^0b^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^1b^n + \binom{n+1}{2}a^2b^{n-1} + \dots + \binom{n+1}{n}a^nb^1 + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0$$

réajustement

$$= \binom{n+1}{0}a^0b^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^1b^n + \dots + \binom{n+1}{n}a^nb^1 + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}$$

La propriété est héréditaire

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall a, b \in \mathbb{Z}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$