VI Conjugué d'un nombre complexe

Rappel : Dans l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
$(a+b)$ et $(a-b)$ sont deux expressions conjuguées.
Ainsi l'expression conjuguée de $(3-2x)$ est $(3+2x)$

1°) Définition.

Déf : Soit $z = a+bi$ un nombre complexe
Le conjugué de z est le nombre complexe noté $\bar{z}$ et on a
$\bar{z} = a - bi$

$Re(\bar{z}) = Re(z)$
$Im(\bar{z}) = -Im(z)$

exemples :

- $\overline{2+3i} = 2-3i$
- $\overline{5i-1} = \overline{-1+5i} = -1-5i$
- $\overline{-7} = \overline{-7+0i} = -7-0i = -7$
- $\overline{3i} = \overline{0+3i} = 0-3i = -3i$

Rq : (Propriétés évidentes)

- $\bar{\bar{z}} = z$
- Tout nombre réel a pour conjugué lui-même
- le conjugué d'un imaginaire pur est égal à son opposé

2°) Premières propriétés et application à la division

Soit $z = a+bi$ un nombre complexe

- $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a \in \mathbb{R}$
- $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$ imaginaire pur
- $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2i^2 = a^2+b^2 \in \mathbb{R}_+$

$(ab)^n = a^n b^n$

Propriété : 1°) $z+\bar{z} \in \mathbb{R}$
2°) $z-\bar{z}$ est imaginaire pur
3°) $\boxed{z\bar{z} = a^2+b^2} \in \mathbb{R}_+$

Application à la division de nombres complexes

- exemple 1 :

$$\frac{2+3i}{5-4i} = \frac{(2+3i)\times(5+4i)}{(5-4i)\times(5+4i)}$$

on multiplie par le conjugué du dénominateur

$$= \frac{10+8i+15i+12i^2}{5^2+(-4)^2}$$

$$= \frac{-2+23i}{41}$$

$$= -\frac{2}{41} + \frac{23}{41}i$$

Rappels du collège

$$\frac{3+7}{5} = \frac{3}{5} + \frac{7}{5}$$

$$\frac{3x}{5} = \frac{3}{5}x$$

- exple 2 :

$$\frac{3-2i}{2i+7} = \frac{3-2i}{7+2i} = \frac{(3-2i)(7-2i)}{(7+2i)(7-2i)}$$

$$= \frac{21-6i-14i+4i^2}{7^2+2^2}$$

$$= \frac{17-20i}{53} = \frac{17}{53} - \frac{20}{53}i$$

- $$\frac{1}{i} = \frac{1\times(-i)}{i\times(-i)} = \frac{-i}{0^2+1^2}$$

$$= -i$$

$i = 0 + 1i$

On remarque que l'opposé et l'inverse de i sont égaux

3°) Propriétés algébriques

Propriété : Soient $z = a+bi$ et $z' = a'+b'i$ $\left(\begin{matrix} z \neq 0 \\ z' \neq 0 \end{matrix}\right)$

2 nombres complexes

1°) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

2°) $\overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z'}$

3°) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

4°) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

5°) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

6°) Pour tout entier naturel n $\overline{z^n} = \overline{z}^n$