

V Application aux systèmes linéaires

On veut résoudre ici des systèmes linéaires de n équations à n inconnues.

Exemple:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x + y + 0z = 2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

On peut traduire ce système avec les matrices sous la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A \quad \quad \quad X \quad \quad \quad = \quad Y$

On obtient alors une équation avec les matrices à 1 seule inconnue : X qui est $AX = Y$

Dans le cas où A est inversible, il est clair que

→ d'une part

$$AX = Y \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}Y \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}Y \Rightarrow X = A^{-1}Y$$

Attention à réciproque et facile car on ne sait pas si

A^{-1} est simplifiable (régulière)

→ et réciproquement

[Si] $X = A^{-1}Y$

[Alors] $A \times X = A \times (A^{-1}Y) = (A \times A^{-1})Y = I_n \times Y = Y$

Donc $A^{-1}Y$ est l'unique solution du système.

Remarque : A la calculatrice on obtient

$$X = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 8/7 \\ 27/7 \end{pmatrix}$$

Propriété :

Tout système linéaire de n équations à n inconnues peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = Y$ où $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre n et où $X = (x_i)$ et $Y = (y_i)$ sont des matrices colonnes de taille $n \times 1$.

[Si] A est inversible, [Alors] le système possède une unique solution : le n -uplet constitué des coefficients de la matrice $X = A^{-1}Y$.