3°) Application à la recherche de diviseurs

Théorème : Forme des diviseurs

[S.] Un entier $n \geq 2$ se décompose en produit de facteurs premiers sous la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

[Alors] les diviseurs positifs de n sont de la forme

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \quad \forall 1 \leq i \leq k$$

exemple :

On a vu que $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Voici donc quelques diviseurs de 360

- $d_1 = 2^0 \times 3^1 \times 5^0 = 3$
- $d_2 = 2^0 \times 3^0 \times 5^0 = 1$
- $d_3 = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$
- $d_4 = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$
- ...

Remarque : la difficulté reste pour dresser la liste complète de tous les diviseurs sans en oublier.

Démonstration :

Triviale avec la définition de la divisibilité et la commutativité et l'associativité de la multiplication, car les p_i sont "indivisibles"

Corollaire : Nombre de diviseurs

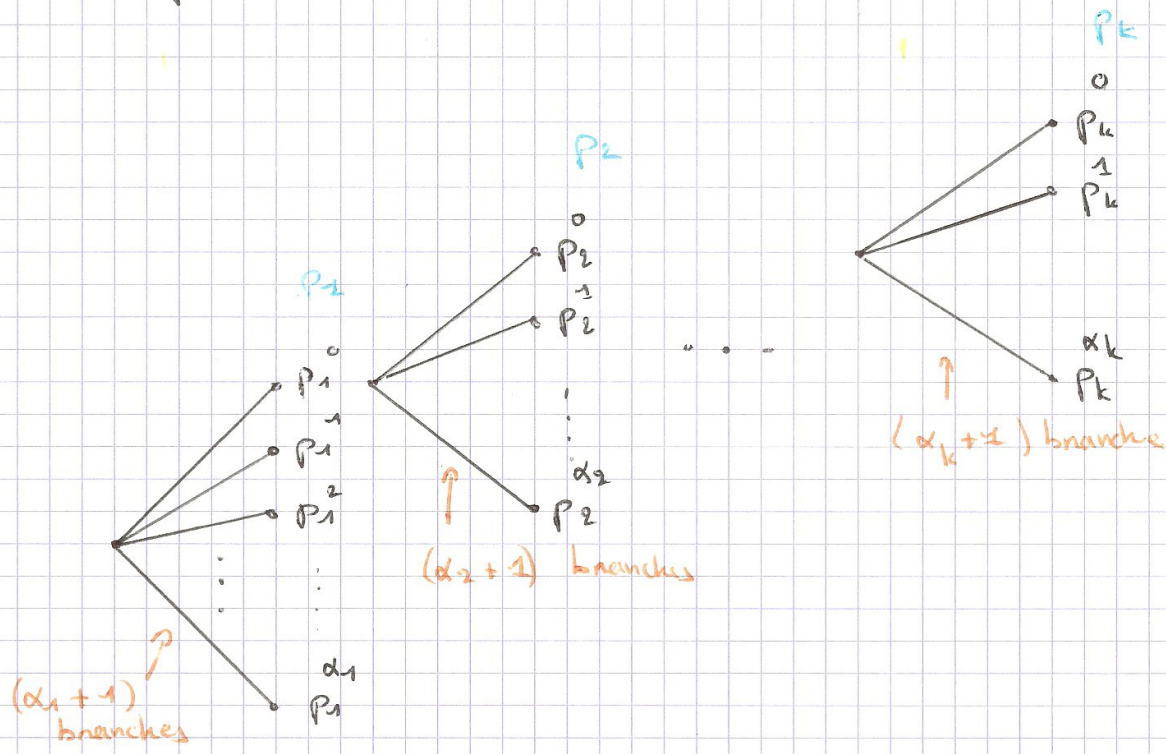
Si un entier $n \geq 2$ admet une décomposition en produit de facteurs premiers sous la forme

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

Alors n possède exactement

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) \text{ diviseurs positifs}$$

Démonstration : On peut utiliser un arbre de comptage comme en probabilité.



Chaque chemin de l'arbre donne un diviseur de n, et dans tous les cas les diviseurs sont distincts.

nombre de branches $= (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \times \cdots \times (\alpha_k + 1)$