II MOIVRE et EULER

1°) Formule de MOIVRE

propriété :

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Démonstration : c'est une autre écriture de la propriété.

$\arg(z^n) = n \arg(z)$ pour un nombre complexe de module 1

ou encore de $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

exemple d'utilisation

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\, i + i^2\sin^2\theta$$

$$= \underbrace{\cos^2\theta - \sin^2\theta}_{\text{partie réelle}} + \underbrace{2\sin\theta\cos\theta}_{\text{partie imaginaire}}\, i$$

D'autre part

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

2 nombres complexes sont égaux (ssi) ils ont même partie réelle et même partie imaginaire

On obtient

$$\begin{cases} \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

Copyright : ©Programmaths 2020