3°) Algorithme d'Euclide

Principe :

Pour déterminer le PGCD de deux entiers, on utilise la propriété $PGCD(a,b) = PGCD(r,b)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b.
On procède par division euclidiennes successives jusqu'au dernier reste non nul qui se trouve être le PGCD

$$a = b q_1 + r_1 \qquad PGCD(a,b) = PGCD(r_1, b)$$
$$b = r_1 q_2 + r_2 \qquad PGCD(r_1, b) = PGCD(r_2, r_1)$$
$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \qquad PGCD(r_2, r_1) = PGCD(r_3, r_2)$$
$$\vdots$$
$$r_{k-1} = r_k q_{k+1} + 0 \qquad PGCD(r_k, r_{k-1}) = PGCD(0, r_k) = r_k$$

Le PGCD est le dernier reste non nul.

exemple de mise en oeuvre : Recherche de PGCD(240, 36)

$$240 = 36 \times 6 + 24 \qquad PGCD(240,36) = PGCD(24,36)$$
$$36 = 24 \times 1 \boxed{+12} \qquad PGCD(24,36) = PGCD(12,24)$$
$$24 = 12 \times 2 + 0 \qquad PGCD(12,24) = PGCD(0,12) = \boxed{12}$$

Cl. $PGCD(240,36) = 12$

Propriété : Soient a et b deux entiers non simultanément nuls les diviseurs communs à a et à b sont les diviseurs de PGCD(a,b)

$$D(a,b) = D(PGCD(a,b))$$

Démonstration :

Il suffit de reprendre l'algorithme d'Euclide en utilisant les diviseurs communs en lieu et place du PGCD.
On obtient alors :

$$D(a,b) = D(r_1, b) = \ldots\ldots = D(0, r_k) = D(r_k)$$