

III Exemples d'équations diophantiniennes

Exemple 1:

Trouver tous les couples (n, y) d'entiers relatifs tels que

$$66n + 21y = 5$$

$$\text{On a } 66 = 2 \times 3 \times 11$$

$$\text{et } 21 = 3 \times 7$$

$$\left. \begin{array}{l} 66 = 2 \times 3 \times 11 \\ \text{et } 21 = 3 \times 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{PGCD}(66, 21) = 3$$

On sait que toute combinaison linéaire de 66 et 21 est un multiple de $\text{PGCD}(66, 21)$ donc un multiple de 3

Or 5 n'est pas un multiple de 3

Conclusion: $S = \emptyset$

Exemple 2: Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (n, y)

tels que $15n - 14y = 1$

Le couple $(1, 1)$ est une solution évidente de l'équation

$$\textcircled{1} \quad 15n - 14y = 1$$

$$\text{donc } \text{PGCD}(15, 14) = 1$$

$$\textcircled{2} \quad 15 \times 1 - 14 \times 1 = 1$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 15(n-1) - 14(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 15(n-1) = 14(y-1)$$

$$\Rightarrow 15 \text{ divise } 14(y-1)$$

$$\text{G.Poss} \Rightarrow 15 \text{ divise } (y-1)$$

$$\Rightarrow y-1 = 15k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y = 1 + 15k \quad k \in \mathbb{Z}$$

On a alors

$$15(n-1) = 14 \times 15k$$

$$\Leftrightarrow n-1 = 14k$$

$$\Leftrightarrow n = 1 + 14k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Réciproquement

$$15(1+14k) - 14(1+15k)$$

$$= 15 \times 1 + 15 \times 14k - 14 \times 1 - 14 \times 15k$$

$$= 15 \times 1 - 14 \times 1$$

$$= 1$$

Conclusion.

$$S = \{ (1+14k; 1+15k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

Exemple 3: Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers relatifs tels que $66x + 21y = -12$

$\text{PGCD}(66, 21) = 3$ (voir exemple 1) et -12 est un multiple de 3 donc $\mathbb{P}$ a des solutions

• On simplifie par le PGCD

$$(E) \Leftrightarrow 66x + 21y = -12$$

$$\Leftrightarrow 22x + 7y = -4$$

$$\text{avec } \text{PGCD}(66, 21) = 3$$

$$\Leftrightarrow \text{PGCD}(3 \times 22, 3 \times 7) = 3$$

$$\Leftrightarrow \text{PGCD}(22, 7) = 1 \text{ par homogénéité}$$

• On cherche une solution particulière à partir d'une combinaison linéaire égale au PGCD

On cherche une combinaison linéaire de 22 et 7 égale à 1

$$\text{on a } (22 \times 1 + 7 \times (-3) = 1) \times 4$$

$$\Rightarrow 22 \times 4 + 7 \times (-12) = 4$$

donc le couple $(4; -12)$ est une solution de l'équation E

• On termine la résolution

$$E \Leftrightarrow 22x + 7y = 4 \quad (1)$$

$$22 \times 4 + 7 \times (-12) = 4 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 22(x - 4) + 7(y - (-12)) = 0$$

$$\Rightarrow 22(x - 4) = -7(y + 12)$$

$$\Rightarrow 22 \text{ divise } -7(y + 12)$$

$$\text{Gauss} \Rightarrow 22 \text{ divise } (y + 12) \text{ car } \text{PGCD}(22, 7) = 1$$

$$\Rightarrow y + 12 = 22k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y = -12 + 22k \quad k \in \mathbb{Z}$$

On obtient alors

$$22(x - 4) = -7 \times 22k$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = -7k$$

$$\Leftrightarrow x = 4 - 7k$$

• Réciproquement:

$$22(4 - 7k) + 7(-12 + 22k)$$

$$= 22 \times 4 - 22 \times 7k + 7 \times (-12) + 7 \times 22k$$

$$= 22 \times 4 - 7 \times (-12) = 4$$

Conclusion:

$$S = \{ (4 - 7k; -12 + 22k), k \in \mathbb{Z} \}$$

Exemple 4: s'il n'y a pas de solution évidente.

Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (m, y) tels que

$$71m + 19y = 1$$

• On détermine une solution particulière à l'aide de l'algorithme d'Euclide

$$71 = 3 \times 19 + 14$$

$$19 = 1 \times 14 + 5$$

$$14 = 2 \times 5 + 4$$

$$5 = 1 \times 4 + 1$$

$$4 = 4 \times 1 + 0$$

$$14 = 71 \times 1 + 19 \times (-3)$$

$$5 = 19 - 14$$

$$= 19 \times 1 - (71 \times 1 + 19 \times (-3))$$

$$= 71 \times (-1) + 19 \times 4$$

$$4 = 14 - 2 \times 5$$

$$= 71 \times 1 + 19 \times (-3) - 2 \times (71 \times (-1) + 19 \times 4)$$

$$= 71 \times 3 + 19 \times (-11)$$

$$1 = 5 - 4 = 71 \times (-1) + 19 \times 4 - (71 \times 3 + 19 \times (-11))$$

$$1 = 71 \times (-4) + 19 \times 15$$

• On poursuit la résolution comme dans les exemples précédents

$$(1) \quad 71m + 19y = 1$$

$$(2) \quad 71 \times (-4) + 19 \times 15 = 1$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 71(m+4) + 19(y-15) = 0$$

$$\Rightarrow 71(m+4) = -19(y-15)$$

$$\Rightarrow 71 \text{ divise } -19(y-15)$$

GAUC

$$\text{PGCD}(71, 19) = 1 \Rightarrow 71 \text{ divise } y-15$$

$$\Rightarrow y-15 = 71k \quad k \in \mathbb{Z}$$

on a alors

$$71(m+4) = -19 \times 71k$$

$$\Rightarrow m+4 = -19k$$

Réciproquement

$$71(-4-19k) + 19(15+71k)$$

$$= 71 \times (-4) - 71 \times 19k + 19 \times 15 + 19 \times 71k$$

$$= 71 \times (-4) + 19 \times 15$$

$$= 1$$

Conclusion:

$$S = \{ (-4-19k; 15+71k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$