3°) Suites de matrices définies par $U_{n+1} = AU_n$

Propriété 1 :

$\boxed{\text{Si}}$ (U_n) est une suite de matrices colonnes de taille $p \times 1$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice carrée d'ordre p

$\boxed{\text{Alors}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$

Remarques :

- On retrouve ici une définition de suite par récurrence
- Cette propriété est similaire à celle du terme général d'une suite géométrique.
- Propriété identique pour une suite de matrices lignes de taille $1 \times p$ du type $U_{n+1} = U_n \times A$
  on a alors $U_n = U_0 \times A^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Démonstration :

par récurrence : voir la vidéo "mouvements de population"

Exemple : On considère la suite (U_n) définie par

$U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1°) Calculer U_1, U_2

2°) Exprimer U_n en fonction de n $\forall n \in \mathbb{N}$

3°) Calculer U_{15}

1°) $U_1 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times (-1) \\ 2 \times 2 - 1 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$U_2 = A \times U_1$ ... Calcul de proche en proche

2°) La formule de récurrence est du type $U_{n+1} = AU_n$ donc

$\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = A^n U_0$

3°) $U_{15} = A^{15} \times U_0 = \begin{pmatrix} 21\,87 \\ -10\,935 \end{pmatrix}$