

LG MODEL PRÉES - PRÉDATEURS

- 1°) • S'il n'y a pas de prédateur, alors, a priori, les proies pourraient proliférer à l'infini
- S'il n'y a pas de proies, alors on pourrait penser qu'il y aurait une extinction progressive des prédateurs
 - Si les deux espèces coexistent, alors
 - le nombre de proies diminue si le nombre de prédateurs augmente
 - le nombre de prédateurs augmente si le nombre de proies augmente

$$2^{\circ}) \quad s_{n+1} = (1+a)s_n - bs_n r_n$$

$1+a > 1 \Rightarrow$ augmentation naturelle des proies

diminution proportionnelle à la quantité de proies et de prédateurs

$$r_{n+1} = (1-d)r_n + cs_n r_n$$

$1-d < 1 \Rightarrow$ diminution naturelle des requins par décès ou autre

augmentation proportionnelle à la quantité de proies et de prédateurs

3°) Commentaires :

- a) • Il n'y a pas linéarité dans l'évolution des proies et des prédateurs
- A priori, le nombre de proies et de prédateurs ne se stabilisent pas avec le temps. On alterne des périodes où l'une des 2 espèces domine avec des périodes où les 2 espèces se trouvent en grand nombre ou en petit nombre.
- b) Probablement, selon le modèle, la reprise de la pêche en mer Adriatique a coïncidé avec une période où les requins étaient dominants.

$$c) \begin{cases} s_{n+1} = s_n \\ r_{n+1} = r_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_n = (1+a)s_n - b s_n r_n \\ r_n = (1+d)r_n + c s_n r_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a s_n - b s_n r_n \\ 0 = -d r_n + c s_n r_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = s_n (a - b r_n) \\ 0 = r_n (-d + c s_n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_n = \frac{a}{b} \\ s_n = \frac{d}{c} \end{cases}$$

On écarte le cas où $r_n = 0$ et où $s_n = 0$

Les états d'équilibre sont donc

$$① \begin{cases} s_n = \frac{d}{c} \\ r_n = \frac{a}{b} \end{cases}$$

$$\text{et } ② \begin{cases} s_n = 0 \\ r_n = 0 \end{cases} \text{ sans intérêt}$$

Avec les valeurs de a, b, c et d on obtient donc $\begin{cases} s_n = 1000 \\ r_n = 25 \end{cases}$

d) On constate que si on est très proche de cet état d'équilibre, le système reste assez stable. Cependant, dès qu'on s'éloigne un peu plus, le système diverge très rapidement.

4°) a) D'après a 3° l'état stable est $s_n = \frac{d}{c}$ et $r_n = \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned} b) u_{n+1} &= s_{n+1} - \frac{d}{c} \\ &= (1+a)s_n - b s_n r_n - \frac{d}{c} \\ &= (1+a)\left(u_n + \frac{d}{c}\right) - b\left(u_n + \frac{d}{c}\right)\left(v_n + \frac{a}{b}\right) - \frac{d}{c} \\ &= u_n + \frac{d}{c} + a u_n + \frac{ad}{c} - b\left(u_n v_n + \frac{a u_n}{b} + \frac{d}{c} v_n + \frac{ad}{bc}\right) - \frac{d}{c} \\ &= u_n + a u_n + \frac{ad}{c} - b u_n v_n - a v_n - \frac{bd}{c} v_n - \frac{ad}{c} \\ &= u_n - \frac{bd}{c} v_n - b u_n v_n \end{aligned}$$

$$s_n = u_n + \frac{d}{c}$$

$$r_n = v_n + \frac{a}{b}$$

De même on obtient $v_{n+1} = \frac{ac}{b} u_n + v_n + c u_n v_n$

c) si on est proche de l'état d'équilibre alors

$$s_n \approx \frac{d}{c} \Rightarrow s_n - \frac{d}{c} \approx 0 \Rightarrow u_n \approx 0$$

donc le produit

$$r_n \approx \frac{a}{b} \Rightarrow r_n - \frac{a}{b} \approx 0 \Rightarrow v_n \approx 0$$

$u_n v_n$ est proche de 0

donc négligeable

$$d) \begin{cases} u_{n+1} = u_n - \frac{bd}{c} v_n \\ v_{n+1} = \frac{ac}{b} u_n + v_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

e) Donc le terme général de la suite $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ est

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} s_0 - \frac{d}{c} \\ r_0 - \frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

Pour suite on obtient

$$\begin{pmatrix} s_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d}{c} \\ \frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} s_n \\ r_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} s_0 - \frac{d}{c} \\ r_0 - \frac{a}{b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d}{c} \\ \frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

Le remplacement de S par S' permet de faire les calculs plus rapidement avec une erreur commise négligeable.

Pour ailleurs, cela permet de bien mettre en évidence l'état stable ainsi que les écarts avec cet état.