4°) Suites de matrices définies par $U_{n+1} = AU_n + B$

Propriété 2

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille $p \times 1$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = AU_n + B$

où A est une matrice carrée non nulle d'ordre p et B une matrice colonne de taille $p \times 1$

$\boxed{\text{Si}}$ il existe une matrice colonne C de taille $p \times 1$ telle que $C = AC + B$

$\boxed{\text{Alors}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = A^n(U_0 - C) + C$

Démonstration :

$$U_{n+1} = AU_n + B$$
$$- \quad C = AC + B$$

$\Rightarrow U_{n+1} - C = A(U_n - C)$

Soit (V_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = U_n - C$

on a alors $V_{n+1} = AV_n$

Donc d'après la propriété 1

$\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = A^n V_0 \Leftrightarrow U_n - C = A^n(U_0 - C)$

$\Leftrightarrow U_n = A^n(U_0 - C) + C$

Remarque :

$C = AC + B$

$\Leftrightarrow C - AC = B$

$\Leftrightarrow (I_p - A)C = B$ où I_p est la matrice identité d'ordre p

$\boxed{\text{Si}}$ $I_p - A$ est inversible

$\boxed{\text{Alors}}$ $C = (I_p - A)^{-1}B$

Vocabulaire : Ces suites sont des suites arithmético-géométriques

Propriété 3 :

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille $p \times 1$ vérifiant $U_{n+1} = AU_n + B$

On suppose qu'il existe une matrice C telle que $C = AC + B$

1°) $\boxed{\text{Si}}$ $U_0 = C$ $\boxed{\text{Alors}}$ (U_n) converge vers C

2°) $\boxed{\text{Si}}$ $U_0 \neq C$ et si (A^n) converge $\boxed{\text{Alors}}$ (U_n) converge

Démonstration :

On connait alors le terme général de U_n :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = A^n(U_0 - C) + C$

1°) Trivial $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = C$

2°) $\boxed{\text{Si}}$ A^n converge vers une matrice A'

$\boxed{\text{Alors}}$ (U_n) converge vers $A'(U_0 - C) + C$

Propriété 4 :

$\boxed{\text{Si}}$ une suite (U_n) de matrices colonnes vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + B$ est convergente,

$\boxed{\text{Alors}}$ sa limite U est une matrice colonne vérifiant $U = AU + B$

Démonstration :

Dans l'égalité $U_{n+1} = AU_n + B$

U_{n+1} converge vers une matrice U par unicité de la limite

et $AU_n + B$ converge vers $AU + B$.

donc on a $U = AU + B$.

Propriété 5 (admise)

Soit (U_n) une suite de matrice colonnes vérifiant

$U_{n+1} = AU_n + B$

Dans le cas où $(I_p - A)$ n'est pas inversible,

- Soit il n'existe aucune matrice colonne vérifiant $U = AU + B$ (ce qui signifie qu'il ne peut pas y avoir de limite)

- soit il existe une infinité de matrices colonnes vérifiant $U = AU + B$ dont l'une est éventuellement la limite dans le cas d'une suite convergente

Remarque : On peut réécrire toutes les propriétés avec des matrice lignes (U_n) vérifiant

$U_{n+1} = U_n \times A + B$