b) Etude des variations d'une fonction

Propriété fondamentale :

Soit f une fonction définie sur I et soit f' sa fonction dérivée.

1) $\boxed{\text{Si}}$ $f'(x) > 0$ sur I $\boxed{\text{Alors}}$ f est strictement croissante sur I

2) $\boxed{\text{Si}}$ $f'(x) < 0$ sur I $\boxed{\text{Alors}}$ f est strictement décroissante sur I

3) $\boxed{\text{Si}}$ $f'(x) = 0$ sur I $\boxed{\text{Alors}}$ f est constante sur I

MÉTHODE

Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.

→ On calcule $f'(x)$

→ Si ce n'est pas déjà fait ou donné dans l'énoncé on factorise et on réduit au même dénominateur pour écrire $f'(x)$ sous forme de produit ou quotient

→ On construit le tableau de signe de $f'(x)$ en prenant 1 ligne pour chaque facteur

→ On en déduit les variations de f grâce à la propriété ci-dessus.

Exemple :

Soit f définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} = \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3} ; +\infty\right[$

par $f(x) = \dfrac{2x+5}{3x-1}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)$ Etudier les variations de f

Pour étudier les variations de f on étudie le signe de $f'(x)$

$u = 2x+5 \qquad u' = 2$

$v = 3x-1 \qquad v' = 3$

$$f'(x) = \frac{2(3x-1) - 3(2x+5)}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{6x} - 2 - \cancel{6x} - 15}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{-17}{(3x-1)^2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
-17		$-$	$\Vert$	$-$	
$(3x-1)^2$		$+$	$\Vert$	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
Variations de f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

un carré est toujours positif