V Etude des fonctions e^{kx} $k \in \mathbb{R}^*$

Propriété : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{kx}$ où k est un réel non nul

f est derivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = k e^{kx}$$

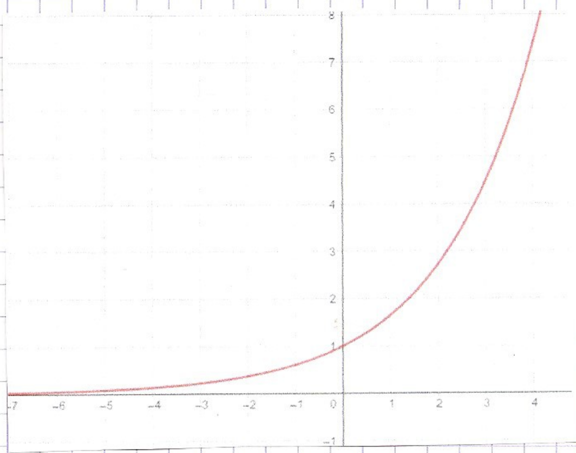
si $k > 0$

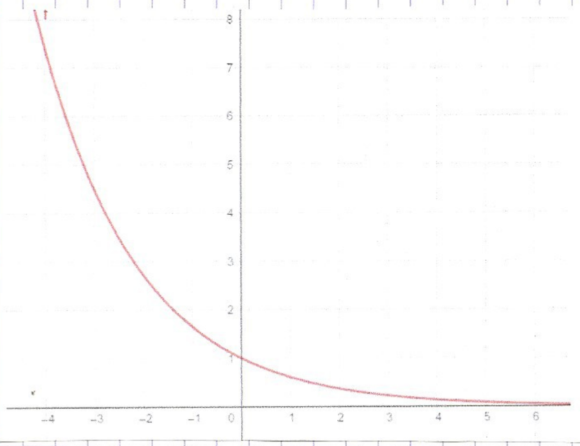
x	$-\infty$ $+\infty$
k	$+$
e^{kx}	$+$
$f'(x)$	$+$
variations de f	$0 \nearrow +\infty$

si $k < 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
k	$-$
e^{kx}	$+$
$f'(x)$	$-$
variations de f	$+\infty \searrow 0$

allure de la courbe représentative





Si $k > 0$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = 0$

Si $k < 0$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = +\infty$

Remarque :

La dérivée de e^{kx} s'obtient grâce à la formule de 1ère

$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$

qui appliquée à e^{u} donne

$$\boxed{(e^{u})' = u' e^{u}}$$

et par suite $(e^{kx})' = k e^{kx}$

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

soit $k \in \mathbb{R}^*$

- si $k > 0$ Alors kf et f ont même sens de variation
- si $k < 0$ Alors kf et f ont des sens de variation contraires

Démonstration évidente car $(kf)' = kf'$

le résultat est obtenu en faisant le tableau de signes de la dérivée.

Exercice type :

Déterminer les limites et les variations des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = 3e^{2x}$

2°) $g(x) = 7e^{-4{,}2x}$

3°) $h(x) = -5e^{-0{,}7x}$

1°) $f(x) = 3e^{2x}$

→ au voisinage de $+\infty$

e^{2x} est une fonction du type e^{kx} avec $k = 2 > 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$

par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

→ au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$

donc par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

→ variations :

$k = 2 > 0$ donc e^{2x} est strictement croissante

donc $f(x) = 3e^{2x}$ est strictement croissante

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
variations de f	0	↗	$+\infty$

2°) $g(x) = 7e^{-4,2x}$

$e^{-4,2x}$ est une fonction du type e^{kx} avec $k = -4,2 < 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-4,2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-4,2x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$
- $e^{-4,2x}$ est strictement décroissante

donc $g(x) = 7 \times e^{-4,2x}$ est strictement décroissante

3°) $h(x) = -5\, e^{-0{,}7x}$

$e^{-0{,}7x}$ est une fonction du type e^{kx} avec $k = -0{,}7 < 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0{,}7x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-0{,}7x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$

- $e^{-0{,}7x}$ est strictement décroissante

donc $h(x) = -5 \times e^{-0{,}7x}$ est strictement croissante