Résolution d'équations et d'inéquations avec logarithme et exponentielle

1°) Pour les équations on dispose des propriétés suivantes

- $e^x = e^a \iff x = a$
- $e^x = a \iff (\ln(e^x) = \ln a) \iff x = \ln a$
- $\ln x = \ln a \iff (e^{\ln x} = e^{\ln a}) \iff x = a$
- $\ln x = a \iff (e^{\ln x} = e^a) \iff x = e^a$

Exemples : Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle indiqué

- 1°) $e^{3x+5} = e^{2x-1}$ sur $\mathbb{R}$

$\iff 3x+5 = 2x-1$

$\iff 3x-2x = -1-5$ $\qquad S = \{-6\}$

$\iff x = -6$

- 2°) $e^{3x-7} = 1$ sur $\mathbb{R}$

$\iff e^{3x-7} = e^0$

$\iff 3x-7 = 0$ $\qquad S = \left\{\frac{7}{3}\right\}$

$\iff x = \frac{7}{3}$

- 3°) $e^{5x-7} = 3$ sur $\mathbb{R}$

$\iff 5x-7 = \ln 3$

$\iff 5x = 7+\ln 3$ $\qquad S = \left\{\frac{7+\ln 3}{5}\right\}$

$\iff x = \frac{7+\ln 3}{5}$

- 4°) $e^{5x-7} = -3$ sur $\mathbb{R}$

C'est impossible car une exponentielle est positive

$S = \emptyset$

5°) $\ln(3x+5)=0$ sur $]-\frac{5}{3};+\infty[$

$\iff \ln(3x+5)=\ln 1$

$\iff 3x+5=1$

$\iff 3x=-4$

$\iff x=\frac{-4}{3}$

$S=\left\{-\frac{4}{3}\right\}$

6°) $\ln(2x+3)=\ln 3$ sur $]-\frac{3}{2};+\infty[$

$\iff 2x+3=3$

$\iff 2x=0$

$\iff x=\frac{0}{2}=0$

$S=\{0\}$

7°) $\ln(4-2x)=-3$ sur $]-\infty;2[$

$\iff 4-2x=e^{-3}$

$\iff -2x=-4+e^{-3}$

$\iff x=\frac{-4+e^{-3}}{-2}<2$

En utilisant la définition de ln

$S=\left\{\frac{-4+e^{-3}}{-2}\right\}$

Rq: on peut aussi procéder de la façon suivante

$\ln(4-2x)=-3$

$\iff e^{\ln(4-2x)}=e^{-3}$

$\iff 4-2x=e^{-3}$

$\iff$ ⋮

$\iff x=\frac{-4+e^{-3}}{-2}$

En utilisant la propriété $e^{\ln x}=x$

Rq: on aurait pu faire la même chose pour la 3°)

$e^{5x-7}=3$

$\iff \ln(e^{5x-7})=\ln 3$

$\iff 5x-7=\ln 3$

$\iff x=\frac{7+\ln 3}{5}$

avec la propriété $\ln(e^x)=x$

2°) Pour les inéquations on dispose des propriétés suivantes

- $e^x < e^a \Leftrightarrow x < a$
- $e^x < a \Leftrightarrow (\ln(e^x) < \ln a) \Leftrightarrow x < \ln a$
- $\ln x < \ln a \Leftrightarrow (e^{\ln x} < e^{\ln a}) \Leftrightarrow x < a$
- $\ln x < a \Leftrightarrow (e^{\ln x} < e^a) \Leftrightarrow x < e^a$

Exemples : Résoudre les inéquations suivantes dans l'intervalle indiqué.

1/ $e^{2x-1} > e^{x+3}$ sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2x - 1 > x + 3$

$\Leftrightarrow x > 4$

$S =]4 ; +\infty[$

2°) $e^{3x-7} \leq 3$ sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3x - 7 \leq \ln 3$

$\Leftrightarrow 3x \leq 7 + \ln 3$

$\Leftrightarrow x \leq \dfrac{7 + \ln 3}{3}$

$S = \left]-\infty ; \dfrac{7+\ln 3}{3}\right]$

3°) $\ln x < \ln 7$ sur $]0 ; +\infty[$

$\Leftrightarrow x < 7$

$S =]0 ; 7[$

4°) $\ln x < 2$ sur $]0 , +\infty[$

$\Leftrightarrow x < e^2$

$S =]0 ; e^2[$

5°) $\ln(2x - 1) < \ln x$ sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$

$\Leftrightarrow 2x - 1 < x$

$\Leftrightarrow x < 1$

$S =]\frac{1}{2} ; 1[$

6°) $\ln(3 + 4x) \geq -3$ sur $]-\frac{3}{4} ; +\infty[$

$\Leftrightarrow 3 + 4x \geq e^{-3}$

$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{-3 + e^{-3}}{4} > -\dfrac{3}{4}$

$S = \left[-\dfrac{3+e^{-3}}{4} ; +\infty\right[$