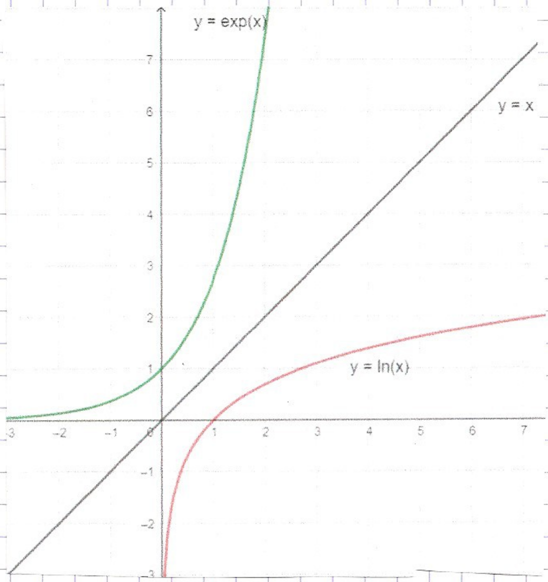
II Etude de la fonction logarithme népérien.

1°) limites de la fonction ln



La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$.

Graphiquement, on peut lire les limites aux bornes de cet ensemble de définition

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Remarque : • $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x$ se lit : " limite lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures à 0 "

• L'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe

2°) Dérivation et étude des variations

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^{\ln x}$

En utilisant la formule de dérivation $(e^u)' = u'e^u$

on obtient $u = \ln x$ donc $u' = \ln'(x)$

donc $f'(x) = \ln'(x)\, e^{\ln x} = x \ln' x$ (1) car $e^{\ln x} = x$

D'autre part, on sait que $f(x) = e^{\ln x} = x$

donc $f'(x) = 1$ (2)

En regroupant (1) et (2) on obtient

$x \ln' x = 1$

$\Leftrightarrow \ln' x = \frac{1}{x}$ car $x \neq 0$

Copyright : ©Programmaths 2022

Propriété :

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Autre formulation de la propriété qui donne une nouvelle définition de la fonction $\ln$.

La fonction logarithme népérien est LA primitive de la fonction inverse qui s'annule pour $x=1$ ($\ln 1 = 0$)

Conséquence : Etude des variations de la fonction $\ln$

x	0		$+\infty$
signe de $\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖	$+$	
variations de $\ln$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3°) Etude du signe de la fonction $\ln$

Cette étude de signe se fait graphiquement à partir du tableau de variation et avec $\ln 1 = 0$

x	0		1		$+\infty$
variations de $\ln$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
signe de $\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

Copyright : ©Programmaths 2022