ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I Définition, exemple et exercice type

Définition

Une équation différentielle est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction dérivable, notée y.

Remarque :

On utilise la lettre y pour la fonction, en référence à l'équation de la courbe représentative d'une fonction : $y = f(x)$

Exemples :

- On a déjà résolu des équations différentielles sans le dire :

  En effet, lorsqu'on cherche une primitive d'une fonction f
  On cherche une fonction dont la dérivée est f
  On cherche donc à résoudre l'équation différentielle

  $y' = f \iff$ recherche de primitive.

- $y' = y$ est une autre équation différentielle.
  On cherche une fonction y dérivable qui est elle-même sa propre dérivée.
  Parmi les fonctions de référence, on peut trouver 2 fonctions qui sont solutions de cette équation :
  → $y = e^x$ on a bien $y' = e^x$
  → $y = 0$ on a alors $y' = 0$

- $y' - 3y = 0$
  $4y' - 5y = 7$
  } Équation différentielle du 1er ordre.

Copyright : ©Programmaths 2022

Exercice - type :

Montrer que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{\frac{5}{3}x}$ est une solution de l'équation différentielle $3y' - 5y = 0$

- Rappel avec les équations "classiques" où l'inconnue est un nombre

Par exemple, on veut montrer que 2 est une solution de l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$

Méthode : On remplace x par la valeur donnée et on vérifie que l'égalité est vraie

$2^2 + 2 \times 2 - 8$

$= 4 + 4 - 8$

$= 0$

donc 2 est solution de l'équation

Pour l'équation différentielle, on procède de façon similaire

↳ on remplace y par $f(x)$ et y' par $f'(x)$ et on vérifie l'égalité $\Rightarrow$ il faut calculer $f'(x)$

$f(x) = 2e^{\frac{5}{3}x}$ donc $f'(x) = 2 \times \frac{5}{3} e^{\frac{5}{3}x} = \frac{10}{3} e^{\frac{5}{3}x}$

$(e^{ku})' = ke^{ku}$

on vérifie ensuite l'égalité

$3f'(x) - 5f(x)$

$= 3 \times \frac{10}{3} e^{\frac{5}{3}x} - 5 \times 2e^{\frac{5}{3}x}$

$= 10e^{\frac{5}{3}x} - 10e^{\frac{5}{3}x}$

$= 0$

donc f est bien solution de cette équation différentielle

Copyright : ©Programmaths 2022