II. Equations différentielles $y' + ay = 0$

Vocabulaire :

Ces équations différentielles sont dites linéaires de 1er ordre

Exemple : on veut résoudre $y' - 2y = 0$ (E)

Cette équation est du type $y' + ay = 0$ avec $a = -2$

On cherche donc une fonction y dérivable telle que

$y' - 2y = 0$

$\Leftrightarrow y' = 2y$

On remarque que les fonctions f du type

$f(x) = e^{kx}$ donnent $f'(x) = ke^{kx} = kf(x)$.

donc la fonction $y(x) = e^{2x}$ est une solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$

De plus, on sait que les constantes multiplicatives sont conservées à la dérivation donc si on multiplie $f(x)$ par une constante C, $f'(x)$ sera aussi multipliée par C et on obtiendra alors

$g(x) = Ce^{2x}$ donc $g'(x) = C \times 2e^{2x} = 2g(x)$

Conclusion : Les solutions de E sont $y(x) = Ce^{2x}$ $C \in \mathbb{R}$

Propriété :

Les solutions de l'équation différentielle linéaire du 1er ordre $y' + ay = 0$ sont définies par

$$y(x) = Ce^{-ax} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

La constante C sera calculée de façon unique à l'aide d'une condition initiale

Copyright : ©Programmaths 2022

Exercice type :

1°) Résoudre l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ (E)

2°) Déterminer la solution de (E) telle que $f(0) = 3$

1°) $y' + 5y = 0$ est de type $y' + ay = 0$ avec $a = 5$

Les solutions de E sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = f(x) = C e^{-5x} \quad C \in \mathbb{R}$$

2°) On a de plus

$f(0) = 3$

$\Leftrightarrow C e^{-5 \times 0} = 3$

$\Leftrightarrow C = 3$

Conclusion : La solution de (E) telle que $f(0) = 3$ est définie par $f(x) = 3e^{-5x}$

Exercice type :

Déterminer la solution f de l'équation différentielle $2y' = 3y$ (E) telle que $f(-1) = 5$

→ Il faut écrire l'équation différentielle sous la forme $y' + ay = 0$

$2y' = 3y$

$\Leftrightarrow 2y' - 3y = 0$

$\Leftrightarrow y' - \frac{3}{2} y = 0$ est de type $y' + ay = 0$ avec $a = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

Les solutions sont définies par $y(x) = C e^{1{,}5x}$ $C \in \mathbb{R}$

De plus $f(-1) = 5$

$\Leftrightarrow C e^{1{,}5 \times -1} = 5$

$\Leftrightarrow C e^{-1{,}5} = 5$

$\Leftrightarrow C = \frac{5}{e^{-1{,}5}}$

Conclusion : La solution de (E) est définie par

$$f(x) = \frac{5}{e^{-1{,}5}} \times e^{1{,}5x} = 5 e^{1{,}5x - (-1{,}5)}$$

Copyright : ©Programmaths 2022