Etude contextualisée de fonctions avec factorisation de la dérivée

Un moulin artisanal peut produire chaque jour une quantité q de farine biologique où q est compris entre 0,3 et 6 tonnes.
À chaque valeur de q appartenant à l'intervalle I = [0,3 ; 6], on associe le coût unitaire de production, $C_U(q) = 4q + \frac{9}{q}$, exprimé en centaines d'euros.

1. Représenter sur la calculatrice la courbe de la fonction C_U et conjecturer la quantité de farine à produire pour que le coût unitaire soit minimal.

2. a. Démontrer que pour tout réel q appartenant à l'intervalle I, $C'_U(q) = \frac{4(q-1,5)(q+1,5)}{q^2}$.

b. Déterminer le signe de $C'_U(q)$ sur l'intervalle I.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction C_U.

d. En déduire la quantité de farine à produire pour que le coût unitaire soit minimal et déterminer le coût unitaire minimal en euros.

1°) Il semble qu'il faille produire par jour environ 1,5 tonne de farine afin que le coût unitaire soit minimal

2°) a) $C_U(q) = 4q + \frac{9}{q} = 4q + 9 \times \frac{1}{q}$

donc $C'_U(q) = 4 + 9 \times \left(-\frac{1}{q^2}\right) = \frac{4}{1} \cancel{-} \frac{9}{q^2}$

on réduit au même dénominateur $= \frac{4 \times q^2 - 9 \times 1}{1 \times q^2}$

$= \frac{4q^2 - 9}{q^2}$

D'autre part $\frac{4(q-1,5)(q+1,5)}{q^2} = \frac{4(q^2 - 1,5^2)}{q^2}$ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$= \frac{4(q^2 - 2,25)}{q^2}$

$= \frac{4q^2 - 9}{q^2}$

$= C'_U(q)$

b) et c)

q − 1,5 = 0
q = 1,5

q + 1,5 = 0
q = −1,5

q	0,3		1,5		6
4		+		+	
$q - 1,5$		−	0	+	
$q + 1,5$		+		+	
q^2		+		+	
signe de $C_U'(q)$		−	0	+	
Variations de C_U	31,2	↘	12	↗	25,5

$C_U(0,3) = 4 \times 0,3 + \frac{9}{0,3} = 31,2$

$C_U(1,5) = 12$

$C_U(6) = 25,5$

d) D'après le tableau de variation, le coût unitaire est minimal pour $q = 1,5$ tonne de farine produite et ce coût unitaire minimal s'élève à 12 centaines d'euros soit 1200 euros.